ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3 (10-11-2017)

1. Αν οι f, g ικανοποιούν συνθήκες Lipschitz σε ένα σύνολο S, να εξετάσετε αν το ίδιο συμβαίνει και για τις συναρτήσεις $kf + mg$, $|f|$, fg, f^2, f/g με $g(t) \neq 0$ στο S.

2. Αν η συνάρτηση $f \in C(R^2)$ πληροί μια συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $S = [a, b] \times [c, d]$, να εξετασθεί αν το ίδιο συμβαίνει και για τις συναρτήσεις α) $g = f^{2017}$ και β) $h = 1/f$ με $f(t) \neq 0, t \in S$.

3. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις πληρούν μια συνθήκη Lipschitz στα αντίστοιχα σύνολα:

   i) $f(t, y) = t^3 e^{-ty^2}, \quad S := [0, 1] \times R.$

   ii) $f(t, y) = \frac{4t}{t^2+y^2}, ty \neq 0, \quad f(0, 0) = 0, \quad S := [0, 1]^2.$

   iii) $f(t, y) = \frac{2t}{t+1} max\{1, y\}, \quad S := [0, \infty) \times R.$

4. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το π.α.τ.

$$e^{y'} = y^2, \quad y(t_0) = y_0 > 0.$$

5. Να εξετασθούν τα πεδία ορισμού των λύσεων των π.α.τ. που αποτελούνται από τις εξισώσεις

$$y' = y^p, \quad [p > 1], \qquad y' = |y|^p, \quad [0 < p < 1], \quad t \geq 0,$$

   και αρχική συνθήκη $y(0) = a > 0$

6. Να αποδειχθεί ότι αν για την συνάρτηση f είναι $f(-t, x) = -f(t, x), (t, x) \in R^2$ και y είναι μια λύση της εξίσωσης $y' = f(t, y)$ που ορίζεται σε ένα συμμετρικό ως προς το 0 διάστημα, τότε η y είναι άρτια συνάρτηση.

7. Να αποδειχθεί ότι η λύση του π.α.τ. $y' = t^2y^4 + 1, y(0) = 0$ είναι περιττή συνάρτηση.

8. Να εξετασθούν ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων τα π.α.τ. των εξισώσεων $y' = \sqrt{2} + sin(y^3 + y), t \geq 0$, και, $y' = \sqrt{t} + cosy, t \geq 0$, με αρχική συνθήκη $y(0) = a$. Να εξετασθεί αν υπάρχουν α) ταλαντούμενες λύσεις, β) φραγμένες λύσεις, γ) μονότονες λύσεις.

9. Αν $h \in C(R)$ και $f \in C^1(R)$ με $f(0) = 0$, να αποδειχθεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης $y' = f(y)h(t)$ διατηρούν σταθερο πρόσημο.

10. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το π.α.τ.

$$y'(t) = 4t^4 + ty^2, \quad y(0) = 0,$$

   και να βρεθεί μια προσέγγιση δεκάτου της λύσης.